《线性代数》第二次小测

出题人：李世豪　　　　　　小测时间：45 分钟

1. 求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

的第一列各元素的余子式之和。

解：题目要求的是

$$M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41},$$

即只需计算行列式

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

从第三列进行展开，该行列式等于

$$-\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -(-9+4) = 5$$

2. 设有两个向量组

$$\begin{aligned} (I):& \quad \alpha_1 = (1,1,0,0)^\top, \alpha_2 = (1,0,1,1)^\top, \alpha_3 = (1,3,-2,-2)^\top; \\ (II):& \quad \beta_1 = (2,-1,3,3)^\top, \beta_2 = (0,1,-1,-1)^\top. \end{aligned}$$

证明: 向量组 (I) 和 (II) 等价。

解：证明向量组 (I) 和 (II) 等价，即证明向量组 (I) 和 (II) 能够相互线性表出。因此只需说明线性方程组

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \\ k_{13} & k_{23} \end{pmatrix} = (\beta_1,\beta_2) \tag{0.1}$$

以及线性方程组

$$(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \tag{0.2}$$

有解即可。对于线性方程组(0.1)，其有解等价于系数矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的主元个数等于增广矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2)$ 的主元个数；而对于线性方程组(0.2)，其有解等价于系数矩阵 (β_1,β_2) 的主元个数等于增广矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2)$ 的主元个数。注意到

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

以及 $(\beta_1,\beta_2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 即交换列向量位置，并未改变主元个数，因此线性方程组(0.1)和(0.2)均有解。所以向量组 (I) 和 (II) 等价。

3. 设 $V = \mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1 = (2,3,1,2)^\top$, $\alpha_2 = (1,2,3,1)^\top$.

   (a) 试求出子空间 V 的维数 $\dim(V)$；

   (b) 若 $\beta_1 = (2,4,1,2)^\top$，$\beta_2 = (-1,-1,2,-1)^\top$，判断是否有 $\beta_1 \in V$ 以及 $\beta_2 \in V$?

解：

(a) 因为

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & -5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 α_1,α_2 线性无关，$\dim(V) = 2$.

(b) 判断是否有 $\beta_1 \in V$ 以及 $\beta_2 \in V$ 即判断线性方程组

$$\beta_1 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \quad \beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

是否有解。即判断 $(\alpha_1, \alpha_2|\beta_1, \beta_2)$ 的系数矩阵主元个数和增广矩阵主元个数即可。注意到

$$(\alpha_1, \alpha_2|\beta_1, \beta_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right),$$

利用初等行变换，我们可以知道 $(\alpha_1, \alpha_2|\beta_1, \beta_2)$ 最终可以变为

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

因此 $(\alpha_1, \alpha_2|\beta_1)$ 所对应的线性方程组无解，而 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$ 所对应的线性方程组有解，因此 $\beta_1 \notin V$，$\beta_2 \in V$.

4. 设 A 是 n 阶方阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 n 维列向量，其中 $\alpha_1 \neq 0$，且 $A\alpha_1 = 3\alpha_1$，$A\alpha_2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$，$A\alpha_3 = -\alpha_2 + 3\alpha_3$.

(a) 证明向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

(b) 若 $n = 3$，求 $\det(A)$.

解:

(a) 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，即存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \tag{0.3}$$

此时式子两边作用矩阵 A，有

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = 0,$$

代入题目中给出的条件 $A\alpha_1 = 3\alpha_1$, $A\alpha_2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + 3\alpha_3$ 并化简，可以得到

$$(3k_1 - k_2)\alpha_1 + (3k_2 - k_3)\alpha_2 + 3k_3\alpha_3 = 0.$$

代入(0.3)，可以知道

$$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0. \tag{0.4}$$

再对该式子两边同时作用 A，可以得到

$$k_2A\alpha_1 + k_3A\alpha_2 = (3k_2 - k_3)\alpha_1 + 3k_3\alpha_2 = 0$$

根据(0.4)可以知道上式等价于 $k_3\alpha_1 = 0$。因为 $\alpha_1 \neq 0$，因此可以得到 $k_3 = 0$。将其代入(0.4)，可以得到 $k_2 \neq 0$，再代入(0.3)，可以得到 $k_1 = 0$。因此得到矛盾，故向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(b) 注意到题目中条件 $A\alpha_1 = 3\alpha_1$，$A\alpha_2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$，$A\alpha_3 = -\alpha_2 + 3\alpha_3$ 可以写成矩阵形式

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

两边同时取行列式可以知道 $\det(A)\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 27\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，可以知道 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$，所以 $\det(A) = 27$.

5. (a) 若 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性相关。

   (b) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4$ 的线性相关性，并说明理由。

解:

(a) 因为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性相关，所以存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0.$$

该式子等价于

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases} \tag{0.5}$$

由于上述线性方程组的系数矩阵的行列式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

因此上述线性方程组只有零解，这与 k_1, k_2, k_3 不全为 0 矛盾。因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

(b) 不妨假设 $\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_4, \alpha_3+3\alpha_4, \alpha_4$ 线性相关，即存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3, k_4，使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_4)+k_2(\alpha_2+2\alpha_4)+k_3(\alpha_3+3\alpha_4)+k_4\alpha_4 = 0,$$

合并同类项后有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+(k_1+2k_2+3k_3+k_4)\alpha_4 = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，容易知道

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,$$

与假设矛盾。所以 $\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_4, \alpha_3+3\alpha_4, \alpha_4$ 线性无关。

6. 写出已经学过的所有矩阵可逆的充要条件。

解：若 n 阶方阵 A 可逆，则：

(a) 存在方阵 B，使得 $AB = BA = I$;

(b) A 可以经过有限次初等变换变为单位阵 (等价地，A 可以写作有限个初等矩阵的乘积);

(c) A 是 n 阶方阵，且 $Ax = 0$ 只有零解 (等价地，A 是 n 阶方阵且 $AX = B$ 有唯一解);

(d) $\det(A) \neq 0$;

(e) A 的 n 个列向量线性无关;

(f) A 的 n 个列向量可以作为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。