《线性代数》第一次小测

出题人：李世豪　　　　　　小测时间：45 分钟

1. 我们课上学过，两个可逆矩阵的乘积仍是可逆矩阵。试证明：如果 A 是任意 n 阶矩阵，B 是 n 阶不可逆矩阵（奇异矩阵），则 AB 是不可逆矩阵。

   解：证明 AB 是不可逆矩阵，只需证明 $ABx=0$ 有非零解即可。注意到满足 $Bx=0$ 的解一定满足 $ABx=0$，且由于 B 是 n 阶不可逆矩阵，因此 $Bx=0$ 有非零解。因此 $Bx=0$ 的非零解也一定是 $ABx=0$ 的非零解。因此 AB 是不可逆矩阵。

2. 我们称一个矩阵 A 是对称矩阵如果 $A^\top=A$，A 是一个正交矩阵如果 $A^\top A=I$。试证明：设 α 是 n 维非零行向量，则 $A=I-\alpha^\top\alpha$ 是对称矩阵。也请给出 A 是正交矩阵的一个充要条件。

   解：显然

$$A^\top=(I-\alpha^\top\alpha)=I-(\alpha^\top\alpha)^\top=I-\alpha^\top\alpha=A$$

   因此 A 是对称矩阵。另外，如果 A 是正交矩阵当且仅当 $AA^\top=I$，此时

$$(I-\alpha^\top\alpha)(I-\alpha^\top\alpha)=I-2\alpha^\top\alpha+\alpha^\top\alpha\alpha^\top\alpha=I+(\alpha\alpha^\top-2)\alpha^\top\alpha.$$

   因为右端项等于 I，这意味着 $(\alpha\alpha^\top-2)\alpha^\top\alpha=0$. 更多的，因为 α 是 n 维非零行向量，所以 $\alpha^\top\alpha$ 不是零矩阵。因此 A 是正交阵当且仅当 $\alpha\alpha^\top=2$.

3. 我们称一个方阵 A 是一个上三角阵如果它的对角以下部分全为 0，即它有如下形式：

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}.$$

试写出一个上三角阵可逆的充要条件，并证明上三角阵的乘积仍是上三角阵。

解：上三角阵是可逆矩阵当且仅当它的对角元不为 0. 不妨假设 A, B 都是 n 阶上三角阵，此时我们需要证明 AB 也是上三角阵，即证明 AB 的 (i, j) 元素为 0 当 $i > j$ 时。因为

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j},$$

且 $a_{i,k} = 0$ 当 $i > k$ 以及 $b_{k,j} = 0$ 当 $k > j$. 因此

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

此时第一项因为 $a_{i,k} = 0$ 所以恒为 0，且因为 $i > j$，所以第二项因为 $b_{k,j} = 0$ 恒为 0. 因此上三角的乘积仍是上三角阵。且有更一般结论，上/下三角矩阵的逆仍是上下三角矩阵。

注：该结论对下三角阵同样成立。

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, XA + 2B = AB + 2X$，求 X^{2003}.

解：先对方程进行化简，有 $X(A - 2I) = (A - 2I)B$。注意到

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

因为这是下三角阵且对角元非零，因此 $A - 2I$ 可逆，且

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

此时我们对两边同时乘以 $(A - 2I)^{-1}$ 有 $X = (A - 2I)B(A - 2I)^{-1}$. 于是，我们得到

$$X^{2003} = (A - 2I)B^{2003}(A - 2I)^{-1}.$$

注意到 $B^2 = I$，所以上式可以写作

$$X^{2003} = (A-2I)B(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解的情形下，求出该方程组的全部解。

解：该线性方程组可以写作增广矩阵形式并进行初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{array}\right],$$

因此当 $\lambda = 1$ 时，该方程无解。当 $\lambda = 2$ 时，方程有无穷多解。当 $\lambda \neq 1, 2$ 时，方程有唯一解。当 $\lambda = 2$ 时，对应的增广矩阵可以写作

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

此时令 $x_3 = k$，可以得到 $x_2 = k-1$，$x_1 = 3-3k$. 因此方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (3-3k, k-1, k).$$

6. 假设 A 是 m 阶可逆矩阵，B 是 n 阶可逆矩阵，C 是 r 阶可逆矩阵，D 是任意 $m \times r$ 阶矩阵。试求出

$$\begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1}.$$

解：这里提供利用广义初等变换的思路，求解方程组的思路可以自己尝试。注意到

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A & 0 & D & I & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & 0 & 0 & I & 0 & -DC^{-1} \\ 0 & B & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & A^{-1} & 0 & -A^{-1}DC^{-1} \\ 0 & I & 0 & 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & C^{-1} \end{array}\right]$$

这里第一步是进行了第三行乘以 $-DC^{-1}$ 加到第一行，第二步是分别乘了 A^{-1}、B^{-1}、C^{-1} 到第一、二、三行。因此

$$\begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & -A^{-1}DC^{-1} \\ 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

7. 我们称三类初等变换对应的矩阵称为初等矩阵。试将

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

写成多个初等矩阵的乘积。

解：注意到

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中第一步是第一行乘以 -2 加到第二行，第二步是第二行乘以 2 加到第一行，第三步是第二行乘以 -1，因此我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$