《线性代数》第二次小测

第 1-4 题为必做，第 5-7 题选择其中一题进行作答即可

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$。若存在 3 阶非零矩阵 B，使得 $AB=0$，

   (a) 求 a 的值;

   (b) 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解。

解:

(a) 因为存在 3 阶非零矩阵 B 使得 $AB=0$，说明 $r(A)<3$。因此我们先将 A 转化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 2a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

所以 $a=2$ 或 $a=0$ 时，满足题目要求。

(b) 这里有两种情形。
第一种：当 $a=0$ 且 $a\neq 2$ 时，对应的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则此时 x_2 是自由变量。令 $x_2=t$，则 $x_1=-2t$，该线性方程组的通解为 $t(-2,1,0)^\top$，其中 $t\in\mathbb{R}$;
第二种：当 $a=2$ 且 $a\neq 0$ 时，对应的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 x_3 是自由变量。令 $x_3 = t$，则 $x_2 = -t$，$x_1 = t$，该线性方程组的通解为 $t(1, -1, 1)^\top$，其中 $t \in \mathbb{R}$。

2. 已知齐次线性方程组 (I):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0, \end{cases}$$

和方程 (II): $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解。

(a) 求 a 的值;

(b) 求所有公共解。

解:

(a) 由于两个方程组有公共解，说明

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right)$$

对应的线性方程组有解。对该矩阵进行初等行变换可知，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right).$$

因此当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时上述线性方程组无解。所以 $a = 1$ 或者 $a = 2$。

(b) 当 $a = 2$ 时，该线性方程组对应的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

可以求得 $x_3=-1$，$x_2=1$，以及 $x_1=0$，所以公共解为 $(0,1,-1)^\top$；

当 $a=1$ 时，该线性方程组对应的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

所以此时 x_3 是自由变量。令 $x_3=t$，则 $x_2=0$ 且 $x_1=-t$，该线性方程组的公共解为 $t(-1,0,1)^\top$, $t\in\mathbb{R}$.

3. 已知三阶方阵 A 的第一行是 (a,b,c)，且 $a\neq 0$。矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$($k$ 为常数) 满足 $AB=0$。求线性方程组 $Ax=0$ 的通解。

解：由于 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\leq 3$。

注意到当 $k\neq 9$ 时，$r(B)=2$，则此时 $r(A)\leq 1$。又由于 A 的第一行元素有非零元素，所以 $r(A)=1$。此时 $Ax=0$ 有两个线性无关向量形成的基础解系。因此可以取 $(1,2,3)^\top$ 与 $(3,6,k)^\top$ 作为其基础解系。所以当 $k\neq 9$ 时，线性方程组的通解可以写为 $s(1,2,3)^\top+t(3,6,k)^\top$，其中 $s,t\in\mathbb{R}$.

当 $k=9$ 时, $r(B)=1$, 则此时 $r(A)=1$ 或者 $r(A)=2$。当 $r(A)=2$ 时, 此时只有一个向量的基础解系，因此可以取 $(1,2,3)^\top$，此时线性方程组的通解可以写为 $s(1,2,3)^\top$，$s\in\mathbb{R}$. 如果 $r(A)=1$，则 A 的每一行都可以写作第一行的某个倍数, 所以只有第一个方程是有约束条件。此时有 $ax_1+bx_2+cx_3=0$，可以看到 x_2 和 x_3 是两个自由变量。令 $x_2=s$ 以及 $x_3=t$，则有

$$x_1=-\frac{1}{a}(bs+ct),$$

所以有通解 $s(-\frac{b}{a},1,0)^\top+t(-\frac{c}{a},0,1)$, 此时 a,b,c 满足约束条件 $a+2b+3c=0$。

4. 设有向量组:

$$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^\top,\ \alpha_2=(2,2+a,2,2)^\top,$$
$$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^\top,\ \alpha_4=(4,4,4,4+a)^\top.$$

问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：由于

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (10+a)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix}$$

$$= (10+a)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = (10+a)a^3,$$

所以当 $a = 0$ 或者 $a = -10$ 时上述向量组线性相关。当 $a = 0$ 时，我们有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$，故 α_1 是其极大无关组且 $\alpha_i = i\alpha_1$ $(i = 2, 3, 4)$。当 $a = -10$ 时，我们有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 & 4 \\ -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大无关组，此时 $\alpha_4 = -\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1$.

5. 设 A, B 均为 n 阶方阵，且 $r(A) + r(B) < n$，证明: 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解。

证：由于 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非零公共解等价于 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0$ 有非零解，此时只需证明 $r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < n$ 即可。注意到

$$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B) < n$$

所以显然 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非零公共解。

6. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=r$。证明：存在 $m\times r$ 矩阵 B 和 $r\times n$ 矩阵 C，满足 $r(B)=r(C)=r$，使得 $A=BC$。

   证：由于 $m\times n$ 矩阵 A 满足 $r(A)=r$，所以存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 注意到 $m\times n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可以拆成 $m\times r$ 阶矩阵 $\tilde{P}=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ 与 $r\times n$ 阶矩阵 $\tilde{Q}=(I_r,\ 0)$ 的乘积，所以取 $B=P\tilde{P}$ 以及 $C=\tilde{Q}Q$ 即可。此时，$r(B)=r(\tilde{P})=r$，$r(C)=r(\tilde{Q})=r$.

7. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵。若 $AB=C$，且矩阵 C 的行向量线性无关，证明 A 的行向量也线性无关。

   证：将上述线性方程组用行向量进行表示，则

$$\begin{pmatrix} a_1B \\ \vdots \\ a_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

   假设存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0,$$

   则 $(k_1a_1+\cdots+k_ma_m)B=k_1c_1+\cdots+k_mc_m=0$。由于 $c_1,\cdots,c_m$ 线性无关，则 $k_1=\cdots=k_m=0$。因此 $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关，即 A 的行向量线性无关。