# 《线性代数》第一次小测

## 第 1-4 题为必做，第 5-7 题选择其中一题进行作答即可

1. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + (a+3)x_2 + (a^2+3)x_3 = 3a+10, \end{cases}$$

其中 $a$ 为常数。

(a) 写出该方程组的增广矩阵；

(b) $a$ 为何值时方程组有解？有解时求出所有的解。

(a) 该线性方程组的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & a+3 & a^2+3 & 3a+10 \end{array}\right];$$

(b) 对该增广矩阵进行初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & a+3 & a^2+3 & 3a+10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a+2 & a^2 & 3a+5 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & a+1 \end{array}\right],$$

所以当 $a^2 - a - 2 \neq 0$ 时方程组有唯一解，即 $a \neq 2$ 或 $a \neq -1$ 时方程组有唯一解，此时

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(3 - \frac{2}{a-2}, 2 - \frac{1}{a-2}, \frac{1}{a-2}\right).$$

当 $a=2$ 时方程无解；当 $a=-1$ 时方程有无穷多解，此时 $x_3$ 是自由变量。令 $x_3=k$, 则 $x_2=2-k$, $x_1=5-x_2-3x_3=5-(2-k)-3k=3-2k$, 所以此时方程解为

$$(x_1,x_2,x_3)=(3-2k,2-k,k),\quad \forall k\in\mathbb{R}.$$

2. 已知 $n$ 阶方阵 $H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则

   (a) 将矩阵 $A$ 表示成 $H$ 的多项式；

   (b) 求矩阵方程 $AX=I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1}$ 中的 $X$.

   (a) 注意到如果引入单位列向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，则 $H=[0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}]$，且 $He_1=0$，$He_i=e_{i-1}$ 对于 $2\le i\le n$。因此 $H^k$ 均可以显式求出，且

$$H^k=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad 1\le k\le n-1$$

   以及 $H^k=0$ 如果 $k\ge n$。因此可以发现 $A=I+H+H^2+\cdots+H^{n-1}$；

   (b) 因为 $A=I+H+\cdots+H^{n-1}$ 且 $H^n=0$，所以根据习题册第 19 页第六题可以知道 $A^{-1}=I-H$。[1]因此，我们有

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1})=(I-H)(I+2H+\cdots+nH^{n-1}) \\ &= I+H+H^2+\cdots+H^{n-1}-H^n=I+H+\cdots+H^{n-1}=A. \end{aligned}$$

3. 设 $A$ 是三阶矩阵，$\alpha$ 是三维列向量，矩阵 $P=[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]$ 可逆，并且 $A^3\alpha=5A\alpha-4A^2\alpha$.

   (a) 求 $B$，使得 $A=PBP^{-1}$；

   (b) 求 $\det(A+I)$.

   (a) 注意到 $AP=PB$，即

$$[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]B=A[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]=[A\alpha,A^2\alpha,5A\alpha-4A^2\alpha],$$

[1]这是因为 $(I+H+\cdots+H^{n-1})(I-H)=I-H^n=I$.

假设 $B$ 的第一列元素为 $b_{11}, b_{21}, b_{31}$，则 $b_{11}\alpha + b_{21}A\alpha + b_{31}A^2\alpha = A\alpha$，可知[2]$b_{21} = 1$，$b_{11} = b_{31} = 0$。同理可以计算出 $B$ 的其余两列，此时

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) 此时

$$\begin{aligned} \det(A+I) &= \det(PBP^{-1}+I) = \det(P(B+I)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B+I)\det(P^{-1}) = \det(B+I). \end{aligned}$$

所以只需要计算 $\det(B+I)$。注意到

$$\det(B+I) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -8.$$

4. 我们称三类初等变换对应的矩阵称为初等矩阵。

(a) 试写出三类初等变换所对应的矩阵；

(b) 试将

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

写成多个初等矩阵的乘积。

(a) 解：可参见书上第 36 页的三类初等矩阵表示。

[2]这里的可知需要用到 $P$ 可逆得到这三个列向量线性无关。为了避免出现线性无关的内容，我们可以考虑 $P^{-1}P = [P^{-1}\alpha, P^{-1}A\alpha, P^{-1}A^2\alpha] = I$，由此可以得到

$$P^{-1}\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}A\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}A^2\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此 $B = P^{-1}AP = P^{-1}[A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(b) 解：注意到

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

其中第一步是第一行乘以 $-2$ 加到第二行，第二步是第二行乘以 2 加到第一行，第三步是第二行乘以 $-1$，因此我们有

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

5. 我们课上学过，两个可逆矩阵的乘积仍是可逆矩阵。试证明：如果 $A$ 是任意 $n$ 阶矩阵，$B$ 是 $n$ 阶不可逆矩阵（奇异矩阵），则 $AB$ 是不可逆矩阵。（提示：利用线性方程组的解的结论）

   解：证明 $AB$ 是不可逆矩阵，只需证明 $ABx=0$ 有非零解即可。注意到满足 $Bx=0$ 的解一定满足 $ABx=0$，且由于 $B$ 是 $n$ 阶不可逆矩阵，因此 $Bx=0$ 有非零解。因此 $Bx=0$ 的非零解也一定是 $ABx=0$ 的非零解。因此 $AB$ 是不可逆矩阵。

6. 我们在习题中做过：和任意一个对角矩阵乘法可交换的矩阵一定是对角矩阵。试寻找出和任意一个 $n$ 阶方阵乘法可交换的矩阵并证明你的结论。

   解：可与任意一个 $n$ 阶方阵乘法可交换的矩阵一定形如 $cI_n$ 的形式，其中 $c$ 是任意常数。我们从已知结论出发，即已知与任意一个对角矩阵乘法可交换的矩阵一定是对角矩阵。此时我们假设这个矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix},$$

此时假设与矩阵 $B$ 可交换的矩阵 $A$ 为除 $(1,2)$ 元素不为 0 其余元素全是 0 的矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

此时通过 $AB=BA$ 可以知道 $a_{12}(b_2-b_1)=0$。又因为假设 $a_{12}$ 不为 0，因此 $b_1=b_2$。同理取 $A$ 中不为 0 的元素为 $(k,k+1)$ $(k=2,3,\cdots,n-1)$，我们可以得到 $b_1=b_2=\cdots=b_n$，即与任意一个 $n$ 阶方阵乘法可交换的矩阵一定形如 $cI_n$ 的形式，其中 $c$ 是任意常数。

7. 假设 $A$ 是 $m$ 阶可逆矩阵，$B$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，$C$ 是 $r$ 阶可逆矩阵，$D$ 是任意 $m\times r$ 阶矩阵。试求出

$$\begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1}.$$

解：这里提供利用广义初等变换的思路，求解方程组的思路可以自己尝试。注意到

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A & 0 & D & I & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & 0 & 0 & I & 0 & -DC^{-1} \\ 0 & B & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & A^{-1} & 0 & -A^{-1}DC^{-1} \\ 0 & I & 0 & 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & C^{-1} \end{array}\right]$$

这里第一步是进行了第三行乘以 $-DC^{-1}$ 加到第一行，第二步是分别乘了 $A^{-1}$、$B^{-1}$、$C^{-1}$ 到第一、二、三行。因此

$$\begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & -A^{-1}DC^{-1} \\ 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{bmatrix}.$$