

《线性代数》小测3

考试时间：45分钟 出题人：李世豪

1. 如果矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 相似，则 xy 的值为多少？

解：因为这两个矩阵相似，则它们有相同的迹和行列式。因此根据它们有相同的迹我们可以知道 $x = 4$ 。根据它们有相同的行列式，我们可以知道

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 24,$$

$$\text{且} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4(4 - y), \text{ 因此 } y = -2. \text{ 故}$$

$$xy = -8.$$

2. 若二次型 $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 正定，则 k 的取值范围为多少？

解：需要先将二次型对应的对称矩阵写出。根据二次型对应的对称矩阵形式，我们知道该二

次型对应的对称矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$ 。因此根据霍尔维茨定理，可以知道该对称矩阵正定当

且仅当它的各阶顺序主子式都大于0。容易知道，其一阶、二阶顺序主子式均大于0。如果它的三阶顺序主子式大于0，这等价于它对应的行列式大于0。因为

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k-4 \end{pmatrix} = k-5,$$

因此二次型正定当且仅当 $k > 5$ 。

3. 用正交变换将下述二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$$

化为标准形，并写出其所用的正交变换。

解：将其对应的矩阵写出，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

因此我们需要写出其对应的正交相似对角化。注意到

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & \lambda - 4 & 2 \\ \lambda - 1 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -2 + \frac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda - 4) & -4 + (\lambda - 1) \\ 0 & 2 - 2(\lambda - 4) & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

其行列式等于 $-(\lambda + 4)(\lambda - 5)^2$ ，因此有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$ 。

因此接下来计算 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 所对应的特征向量。注意到 $5E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ，故其对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)'$ ， $\alpha_2 = (1, 2, 0)'$ 。将其正交化，可以得到正交基底

$$\beta_1 = (1, 0, 1)', \beta_2 = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)'.$$

再将其进行单位化，有标准正交的特征向量

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)', \tilde{\beta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)'.$$

另一方面，对于 $\lambda_3 = -4$ 所对应的特征向量。注意到

$$-4E - A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故其对应的特征向量为 $\beta_3 = (-2, 1, 2)'$ ，将其进行单位化，有 $\tilde{\beta}_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)'$ 。因此

$$A(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3) = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)\text{diag}(5, 5, -4).$$

记 $P = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)^\top$ ，则 $A = P^\top \text{diag}(5, 5, -4)P$ 。因此二次型

$$f(X) = X^\top A X = X^\top P^\top \text{diag}(5, 5, -4) P X.$$

记 $Y = P X$ ，则标准型为 $5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$ 。

4. 已知 A 是 n 阶实对称矩阵， $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值， $x = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ 是 n 维列向量。证明：当向量的长度 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 1$ 时，有 $\lambda_1 \leq x^\top A x \leq \lambda_n$ 。

证明：因为 A 是 n 阶实对称矩阵，故 A 可正交相似于对角阵。因此存在正交矩阵 P ，使得 $PA P^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ，即 $A = P^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ 。此时二次型

$$x^T A x = (P X)^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P X.$$

令 $y = P x$ ，则二次型 $x^T A x = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。更多的，因为 P 是正交矩阵，因此 $||y|| = ||P x|| = ||x||$ 。此时注意到 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ，因此二次型满足关系

$$x^T A x = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n (y_1^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_n,$$

以及

$$x^T A x = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_1 (y_1^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_1.$$

5. 任意3维实列向量均可由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 3)^T$, $\alpha_3 = (t, 1, 2)^T$ 线性表出，则 t 应该满足什么样的条件？

解：事实上，我们仅需要求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成3维实列向量的基底即可。因此仅需 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，此时， $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ 即可。因为

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2-t \end{pmatrix} = 2t - 6,$$

因此 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ 当且仅当 $t \neq 3$ 。

6. 设 A 是3阶矩阵， $1, -1$ 是 A 的特征值，其特征向量分别为 α_1, α_2 ，且 $A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ 。

(1) 证明： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

(2) 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ，求 $P^{-1}AP$ 。

证明：(1) 假设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 。因为 α_1, α_2 是属于特征值 $1, -1$ 的特征向量，因此有 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = -\alpha_2$ ，因此对上式作用 A ，我们有

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 - k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

对此式子再作用 A ，我们有 $(k_1 + 2k_3)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ，因此和第一个式子比较可知， $2k_3\alpha_1 = 0$ 。因为 α_1 是 A 的特征向量，因此 $\alpha_1 \neq 0$ ，由此可知 $k_3 = 0$ 。再将其带回上面的式子可以知道

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0, \quad k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 = 0,$$

因此用同样的方式可以说明 $k_1 = k_2 = 0$ ，因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(2) 因为 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，因此 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

