

《线性代数》小测2

考试时间：45分钟 出题人：李世豪

1. 设 A 是3阶矩阵， A 的第一行元素为1,2,3， A 的第二行元素的代数余子式分别是2, $a+1$, $a-2$, 求 a 的值。

解：注意到 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$ ，因此代入后有

$$2 + 2 \times (a + 1) + 3 \times (a - 2) = 5a - 2 = 0.$$

所以 $a = \frac{2}{5}$.

注释：这个题也可以用代数余子式的定义。我们不妨假设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

根据代数余子式的定义，我们可以得到方程

$$\begin{cases} 2a_{33} - 3a_{32} = -2 \\ a_{33} - 3a_{31} = a + 1 \\ a_{32} - 2a_{31} = 2 - a \end{cases}$$

且根据矩阵存在可以知道该方程有解。因此我们有

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & a+1 \\ -2 & 1 & 0 & 2-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2a-1 \\ -2 & 1 & 0 & 2-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 4-5a \end{bmatrix},$$

该方程有解当且仅当 $4 - 5a = 2$ ，即 $a = \frac{2}{5}$.

2. 若行列式 $D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 $A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41}$ ，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：注意到

$$A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

且

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -11 & -18 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

其结果为-35, 且

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

其结果为7, 因此原行列式为 $2 \times (-35 + 7) = -56$ 。

3. 若三阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 且 $\det(A) = 2023$ 。 $B = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1]$, 求 $\det(B)$ 。

解：因为 $\det(B) = \det(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) + \det(\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$, 且

$$\det(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \det(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3) = \det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2023,$$

$$\begin{aligned} \det(\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) &= \det(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \det(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = -\det(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3) \\ &= \det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2023, \end{aligned}$$

因此 $\det(B) = 2 \times 2023 = 4046$ 。

4. 如果 $C = AB$, 且如果 C 的列向量线性无关, 证明: B 的列向量也线性无关。

解：不妨假设 C 是 $m \times s$ 矩阵, A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 B 是 $n \times s$ 型矩阵。此时, 如果将方程写作分块形式有 $[c_1, c_2, \dots, c_s] = A[b_1, b_2, \dots, b_s]$ 。如果存在 $k_1, \dots, k_s$ 以至于

$$k_1 b_1 + \dots + k_s b_s = 0,$$

则此时作用 A , 有

$$k_1 A b_1 + \cdots + k_s A b_s = k_1 c_1 + \cdots + k_s c_s = 0.$$

由于 C 的列向量线性无关, 因此 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 即 B 的列向量线性无关。

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$, 求向量组的秩、极大线性无关组、并将其余向量由极大无关组线性表出。

解: 将向量组写作矩阵形式 (注意需要将其按照列向量写然后进行初等行变换), 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此该向量组的秩为3, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大无关组, 并且有

$$\begin{cases} k_1 + 3k_3 + k_4 + 2k_5 = 0 \\ k_2 + k_3 + k_5 = 0 \\ k_4 + k_5 = 0 \end{cases}.$$

此时可以知道 k_3, k_5 是自由变量。令 $k_3 = s, k_5 = t$, 此时有解

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (-t - 3s, -s - t, s, -t, t) = (-1, -1, 0, -1, 1)t + (-3, -1, 1, 0, 0)s$$

此时我们有 $\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$ 以及 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$.

6. 设 A 是四阶矩阵, 且 $|A| = \frac{1}{4}$, 求 $|(2A^*)^{-1}|$.

解: 因为 $AA^* = |A|E_4$, 因此 $(2A^*)^{-1} = \frac{1}{2}(A^*)^{-1} = \frac{1}{2|A|}A^{-1} = 2A^{-1}$. 此时,
 $|(2A^*)^{-1}| = |2A^{-1}| = 2^4|A^{-1}| = 2^4|A|^{-1} = 4$.

7. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & b \end{bmatrix}$, 问当 a, b 为何值时, 方程组
 $AX = B$ 有唯一解, 何时方程有无穷多解。

解: 考虑该方程对应的增广矩阵, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & b+2 \end{bmatrix},$$

因此当 $a \neq -2$ 以及 $a \neq 1$ 时，该方程的主元个数等于未知数个数，此时该方程有唯一解。
(在讨论唯一解时，还可以利用系数矩阵可逆，即行列式为0来进行考虑)。

当 $a = -2$ 时，上述增广矩阵可以写作

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & b+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{bmatrix}.$$

因此，当 $a = -2$ 且 $b = 4$ 时，方程有无穷多解，当 $a = -2$ 且 $b \neq 4$ 时，方程无解；

当 $a = 1$ 时，上述增广矩阵可以写作

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix},$$

因此，当 $a = 1$ 且 $b = -2$ 时，方程有无穷多解，当 $a = 1$ 且 $b \neq -2$ 时，方程无解。