

《线性代数》小测1

考试时间：45分钟 出题人：李世豪

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $A^2 - 3A - 10E = 0$ ，证明 A 和 $A - 4E$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆。

解：（本题考察可逆矩阵的性质）由题意，我们知道 $A^2 - 3A - 10E = 0$ ，从此可知 $A(A - 3E) = 10E$ ，则

$$A \cdot \frac{1}{10}(A - 3E) = E。$$

因此 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{10}(A - 3E)$ 。另一方面，因为从 $A^2 - 3A - 10E = 0$ 可以得到 $(A - 4E)(A + E) = 6E$ ，因此可知 $A - 4E$ 可逆，且 $(A - 4E)^{-1} = \frac{1}{6}(A + E)$ 。

2. 已知 A 可逆，且 $(A + B)^2 = E$ ，证明 $(E + BA^{-1})^{-1} = A(A + B)$ 。

解：（本题考察可逆矩阵的基本运算）因为

$$(E + BA^{-1})^{-1} = ((A + B)A^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}，$$

又根据题意可知 $(A + B)^{-1} = A + B$ ，因此原式 $= A(A + B)$ 。

3. 设3阶方阵 A 、 B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$ ，且 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ ，求矩阵 B 。

解：（本题考察矩阵的基本运算，应先得到 B 与 A 的显式关系再进行计算）由题目可知 A 可逆，因此在原式两边右乘 A^{-1} ，可以得到 $A^{-1}B = 6E + B$ ，即

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

解：（本题考察分块矩阵的性质，以及逆矩阵的计算）由分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ，我们知道 $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$ ，其中可根据逆矩阵的计算得到

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 将矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 写作有限多个初等矩阵的乘积。

解：（本题考察的是初等变换与初等矩阵的性质）注意到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

又注意到

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

由此可知

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

由于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，我们可以知道

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 如果线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 需要满足什么样的条件。

解：（本题考察线性方程组初等变换的性质与齐次线性方程组解的基本结论）对系数矩阵做初等变换有

$$\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 - k^2 \end{bmatrix},$$

当齐次线性方程组存在非零解时，我们知道方程的主元个数需要少于未知数个数，因此有 $1 - k^2 = 0$ ，即当 $k = \pm 1$ 时，该线性方程组有非零解。

7. 设一个线性方程对应的增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ ，试问该线性方程组何时解；如果有解，何时解唯一，何时该线性方程组有无穷多解。

解：（本题考察线性方程组的性质）做初等变换有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix},$$

因为该方程组系数矩阵的主元个数与增广矩阵的主元个数相同，因此该方程始终有解。如果 $a \neq 0$ 时，该方程主元个数等于未知数个数，有唯一解；当 $a = 0$ 时，方程主元个数少于未知数个数，有无穷多解。