# 《线性代数》第三次小测

出题人：李世豪　　　　　　小测时间：45 分钟

1. 如果一个矩阵可以相似到对角阵，则称这个矩阵可对角化。

   (a) 试写出一个矩阵相似到对角阵的过程；

   (b) 设 $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 $P$ 和对角阵 $\Lambda$, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

   解:

   (a) 矩阵相似到对角阵的过程如下：

   - 第一步：求出矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$；
   - 第二步：求出每个特征值 $\lambda_i$ 所对应的特征向量 $\xi_i$;
   - 第三步：将特征值与特征向量排列，有

$$A(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

   (b) 第一步：先求出 $A$ 的特征值。因为

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2\lambda+5 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+4)(\lambda^2 - 7\lambda + 6 - 3(-2\lambda+5)) - (-2(-2\lambda+5) + \lambda - 6) \\ &= (\lambda+4)(\lambda^2 - \lambda - 9) - (5\lambda - 16) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 18\lambda - 20 \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda - 20), \end{aligned}$$

所以特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1+\sqrt{21}, \lambda_3=-1-\sqrt{21}$;

第二步求出对应的特征向量。注意到

$$A+I=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\lambda=1$ 所对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；又由于 $\lambda=-1+\sqrt{21}$ 时，特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{21}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$，$\lambda=-1-\sqrt{21}$ 时，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{4} \\ \frac{1+\sqrt{21}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$，所以

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-5+\sqrt{21}}{4} & \frac{-5+\sqrt{21}}{4} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{21}}{4} & \frac{1+\sqrt{21}}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A$ 为 3 阶实对称矩阵，$A$ 的秩为 2，且

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) 求 $A$ 的所有特征值和特征向量;

(b) 求矩阵 $A$.

解:

(a) 因为

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$ 是 $A$ 的两个特征值，$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是对应的特征向量。更多的，因为 $r(A) = 2$，所以 0 也是 $A$ 的特征值，且由于 $A$ 是实对称矩阵，所以属于特征值 0 的特征向量与 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 正交。令 $\xi_3 = (x_1, x_2, x_3)$，则

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

可以求出属于 0 的特征向量为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

(b) 由第一问可知，

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以[1]

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A = A^2$。

(a) 求出 $A$ 的所有特征值；

[1]当然，这里也可以利用正交相似对角化，此时利用正交矩阵可以避免计算矩阵的逆，但是因为正交化也需要计算过程，所以这两者的复杂度是相同的。

(b) 证明 $A$ 可对角化;

(c) 如果 $r(A)=r$，证明 $A$ 可以相似于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

解:

i. 设 $A$ 的特征值是 $\lambda$, $\alpha$ 是对应的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$。对式子 $A=A^2$ 两边同时作用 $\alpha$，有 $(\lambda-\lambda^2)\alpha=0$。因为特征向量非零，所以 $\lambda(\lambda-1)=0$，即 $A$ 的特征值一定是 0 或 1;

ii. 证明 $A$ 可对角化，即可证明 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量。由于 $A=A^2$，所以 $A(A-I)=0$，所以 $r(A)+r(A-I)=n$。由于 $A$ 属于特征值 0 的线性无关的特征向量有 $n-r(A)$ 个，属于特征值 1 的线性无关特征向量有 $n-r(A-I)$ 个，所以 $A$ 共有 $n-r(A)+n-r(A-I)=n$ 个线性无关特征向量。所以 $A$ 可以对角化。

iii. 因为 $A$ 可以对角化，且 $A$ 的特征值为 0 和 1，所以 $A$ 一定可以相似于 $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此证明证明 $A$ 可相似于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 只需证明 $A$ 的特征值 1 具有 $r$ 重。由于相似关系不改变矩阵的秩 (因为可逆矩阵的乘法不改变矩阵的秩)，所以从 $r(A)=r$ 可知 $A$ 属于 1 的特征值一定是 $r$ 重[2]。

4. 基础解系可以用来刻画齐次线性方程组的解。

(a) 试写出基础解系的性质（或者解释为什么基础解系可以用来刻画齐次线性方程组的解）;

(b) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，证明：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+9\alpha_2+16\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3$ 也是 $AX=0$ 的基础解系。

解:

(a) 基础解系是解空间中的一组基，它们是线性无关的，且可以线性表示出齐次线性方程组的所有解。

(b) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系，这说明 $AX=0$ 的解空间是 3 维的。因此，我们验证 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+9\alpha_2+16\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3$ 也

[2]另外一种证明方式：由于 $r(A)=r$，所以属于 0 的线性无关的特征向量为 $n-r$ 个，所以属于 1 的线性无关特征向量为 $n-(n-r)=r$ 个。又由于可对角化，所以 $A$ 的特征值为 1 的重数与线性无关特征向量个数相同。

是基础解系，只需要证明这三个向量是线性无关的解即可[3]。假设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1+9\alpha_2+16\alpha_3)+k_3(\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3)=0,$$

根据 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性无关性，我们可知

$$\begin{aligned} k_1+k_2+k_3&=0,\\ k_1+9k_2-3k_3&=0,\\ k_1+16k_2-4k_3&=0. \end{aligned}$$

该线性方程组的系数矩阵为 Vandermonde 行列式，值为 20，所以该线性方程组只有零解。因此，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+9\alpha_2+16\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3$ 线性无关。更多地，因为这三个向量是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，所以仍是 $AX=0$ 的解，所以 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+9\alpha_2+16\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3$ 构成 $AX=0$ 的基础解系。

5. 设 $A$ 是三阶方阵，三维列向量 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关，且 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$。

   (a) 试求出 $A$ 的所有特征值；

   (b) 证明：矩阵 $B=[\alpha,A^2\alpha,A^4\alpha]$ 可逆。

解：

(a) 因为

$$A[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]=[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix},$$

且矩阵 $[\alpha,A\alpha,A^2\alpha]$ 可逆，所以 $A$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$。因此这两个矩阵有相同的特征值。因为

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda+2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-1),$$

所以 $A$ 的特征值为 $0,1,-3$。

[3]这里要说明两件事：第一是线性无关，第二是这些向量需要是解！

(b) 证明矩阵 $B = [\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha]$ 可逆，即证明 $B$ 的列向量 $\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha$ 线性无关。假设 $k_1\alpha + k_2A^2\alpha + k_3A^4\alpha = 0$, 此时代入 $A^4\alpha = A(A^3\alpha) = A(3A\alpha - 2A^2\alpha) = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = 7A^2\alpha - 6A\alpha$，我们有

$$k_1\alpha - 6k_3A\alpha + (k_2 + 7k_3)A^2\alpha = 0.$$

由于 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关，所以我们有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，所以 $B$ 可逆。